SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Paolo Negrini, Vittorio Scornazzani

PRINCIPIO DI MINIMO PER UNA CLASSE DI OPERATORI ELLITTICI DEGENERI E APPLICAZIONE AL PROBLEMA DI NEUMANN

26 marzo 1992

1. Introduzione

In questo seminario esporremo alcuni risultati recentemente conseguiti, relativi ad una classe di operatori ellittici degeneri. Dimostriamo un principio di minimo, che viene poi applicato per provare un teorema di esistenza e unicità della soluzione debole, opportunamente definita, per il problema di Neumann in un aperto limitato e connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. L'ambiente in cui lavoriamo è uno spazio (che chiameremo $H_\lambda(\Omega)$) del tipo dell'H^1 di Sobolev, legato in modo naturale agli operatori qui considerati. Una ipotesi fondamentale per i nostri risultati è l'esistenza di un operatore continuo di prolungamento da $H_\lambda(\Omega)$ a $\mathring{H}_\lambda(\Omega_o)$, dove $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_o$ e $\mathring{H}_\lambda(\Omega_o)$ denota uno spazio di "funzioni nulle al bordo". La verifica di questa ipotesi in esempi concreti presenta effettive difficoltà, e questo problema, nella sua generalità, rimane aperto. Pur non ottenendo un risultato di validità generale, siamo tuttavia in grado di fornire un esempio, in dimensione 2, in cui costruiamo tale prolungamento.

Sia Ω_o un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$, sia Ω un aperto limitato connesso tale che $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_o$. Siano $a_{ij} = a_{ji}$, b_i $(i,j = 1,2,\dots,n)$ funzioni misurabili a valori reali, e sia μ una misura di Radon non negativa definita in Ω_o.
Sia L l'operatore differenziale

$$(1.1) \qquad L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i + \mu$$

Le ipotesi che imponiamo a L sono le seguenti:

esistono $\nu \geq 1$ e $n+1$ *funzioni reali non negative*

$w, \lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$ *tali che* $\forall x \in \Omega_o$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$(1.2) \qquad \nu^{-1}w(x)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\xi_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu w(x)\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\xi_j^2$$

Sulle funzioni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ facciamo le ipotesi date da Franchi e Lanconelli in [FL1], e ancora da Franchi e Serapioni in [FS]; ricordiamo in particolare le seguenti:

$\lambda_1 \equiv 1$; $\lambda_j = \lambda_j(x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$; λ_j è funzione pari di ciascun argomento;

posto $\Pi = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{k=1}^{n} x_k = 0 \}$, risulta: $\lambda_j \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n - \Pi)$;

$\exists \Lambda > 0$ tale che $0 < \lambda_j(x) < \Lambda \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \Pi$.

Tra i più semplici operatori che soddisfano queste ipotesi vi sono gli operatori (in $\mathbb{R}^{n+m}$) della forma: $L = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$, dove $\alpha > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ e Δ_x, Δ_y sono gli operatori di Laplace nelle variabili x e y.

Riguardo a w, supponiamo $w > 0$ quasi ovunque, e supponiamo che w sia un peso A_2 rispetto alla distanza associata ai campi $X_j = \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ciò significa che:

$$\exists\, C > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0 \quad \frac{1}{|S(x,r)|^2} \int_{S(x,r)} w(y)\, dy \int_{S(x,r)} \frac{1}{w(y)}\, dy \leq C$$

Qui, S(x,r) rappresenta la sfera di centro x e raggio r, relativa alla distanza anzidetta.

Facciamo infine le seguenti ipotesi riguardo a b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$:

Sia A la matrice (a_{ij}); esiste $c > 0$ tale che il vettore

$\frac{w^{-1/2}}{c} \mathbf{b} = \frac{w^{-1/2}}{c} (b_1, \ldots, b_n)$ è A-sub-unitario, cioè:

$$|\langle \mathbf{b}(x) ; \xi \rangle|^2 \leq c\, w(x) \langle A(x)\xi ; \xi \rangle \quad \forall x \in \Omega_0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Operatori di questo tipo sono stati studiati da Franchi e Lanconelli, Franchi e Serapioni. Utilizzando, in particolare, alcuni teoremi di Franchi e Serapioni [FS] dimostreremo un principio di minimo per L.

2. Gli spazi $H_\lambda(\Omega)$, $\mathring{H}_\lambda(\Omega_0)$. Principio di minimo per L.

Introduciamo alcune notazioni:

$L^2(\Omega, w)$ è lo spazio delle funzioni misurabili u definite in Ω tali che

$$\|u\|_2 = \|u\|_{L^2(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega u^2(x)w(x)dx \right)^{1/2} < +\infty ;$$

D è l'operatore: $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ (gradiente);

∇_λ è l'operatore: $\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

indichiamo con $H_\lambda(\Omega)$ (e nel seguito semplicemente con H, per brevità) la chiusura dello spazio $Lip(\Omega)$ delle funzioni lipschitziane in Ω, rispetto alla norma:

(2.1) $$\|u\|_{H_\lambda(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega,w)} + \|\nabla_\lambda u\|_{L^2(\Omega,w)}$$

Indichiamo invece con $\overset{\circ}{H}_\lambda(\Omega_o)$ la chiusura dello spazio $Lip_o(\Omega)$ delle funzioni lipschitziane a supporto compatto in Ω_o, rispetto alla norma:

(2.1.a) $$\|u\|_{H_\lambda(\Omega_o)} = \|u\|_{L^2(\Omega_o,w)} + \|\nabla_\lambda u\|_{L^2(\Omega_o,w)}$$

Facciamo sulla misura μ la seguente ipotesi:

esiste $C>0$ ***tale che:*** $d\mu(x) \leq C\, w(x)\, dx$

ovvero, per ogni v misurabile, non negativa, $\int_{\Omega_o} v\, d\mu \leq C \int_{\Omega_o} vw\, dx$.

Supponiamo infine che ***esista un operatore di prolungamento*** $\mathcal{E}: H_\lambda(\Omega) \to \overset{\circ}{H}_\lambda(\Omega_o)$ ***ed una costante*** C ***tali che, per ogni*** $u \in H_\lambda(\Omega)$, ***si abbia:***

(2.1.b) $$\|\mathcal{E}(u)\|_{H_\lambda(\Omega_o)} \leq C\|u\|_{H_\lambda(\Omega)}$$

(con la lettera C, oppure C_1, C_2, ecc., indichiamo costanti reali positive, che possono assumere valori diversi, anche se indicate col medesimo nome).
Scriveremo nel seguito $\tilde{u}$ in luogo di $\mathcal{E}(u)$.

Per ogni u, v $\in$ H poniamo:

(2.1.c) $$\langle L_\mu u\,;v\rangle = \int_\Omega \langle ADu\,;Dv\rangle dx + \int_\Omega \langle \mathbf{b}\,;Du\rangle v\,dx + \int_\Omega uv\,d\mu$$

Teorema 1 (Principio di minimo) - *Sia* Ω *tale che* $\mu(\Omega) > 0$; *sia* $u \in H$ *tale che*

(2.2) $$\langle L_\mu u\,;v\rangle \le 0 \qquad \textit{per ogni} \quad v \in H \textit{ tale che } v \ge 0 \textit{ in } \Omega$$

Allora $u \le 0$ *quasi dappertutto in* Ω.

dimostrazione - La dimostrazione si svolge per assurdo. Nel seguito indicheremo con m la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
Sia $M = \text{ess sup}\,\{u(x) \mid x \in \Omega\}$, e supponiamo $M > 0$. Poichè $\mu(\Omega) > 0$, le costanti positive non possono soddisfare (2.2); perciò $u(x)$ non può essere uguale a M quasi ovunque in Ω. Esisterà pertanto $k_0 \in]0,M[$ tale che $m(\{x \in \Omega \mid u(x) < k_0\}) = A > 0$. Allora, evidentemente,

(2.3) $$\forall k \in [k_0, M[, \qquad m(\{x \in \Omega \mid u(x) < k\}) \ge A$$

Scegliamo $k \in]k_0, M[$ e poniamo $v = v_k = (u-k)^+$. Allora $v \in H$, $v \ge 0$ e $v > 0$ in un sottoinsieme di Ω di misura positiva. Inoltre (si veda [FKS], coroll. 2.1) risulta:

(2.4) $$Dv(x) = \begin{cases} Du(x) & \text{se } u(x) > k \\ 0 & \text{se } u(x) \le k. \end{cases}$$

Sia $T = \text{supp } v$. Se $x \in T$, allora $Du(x) = Dv(x)$; inoltre $u(x) > k$, perciò $u(x) > (u-k)^+(x) = v(x)$. Otteniamo allora da (2.2):

$$0 \ge \langle L_\mu u\,;v\rangle \ge \langle L_\mu v\,;v\rangle \ge \int_T \langle ADv\,;Dv\rangle dx + \int_T \langle \mathbf{b}\,;Dv\rangle v\,dx.$$

Da questa disuguaglianza, dalle ipotesi su L e dalla disuguaglianza di Hölder otteniamo:

$$\nu^{-1}\int_T |\nabla_\lambda v|^2 w(x)dx \le \int_T \langle ADv\,;Dv\rangle dx \le \int_T |\langle \mathbf{b}\,;Dv\rangle|\,v\,w^{-1/2}w^{1/2}\,dx \le$$

$$\le \Big(\int_T |\langle \mathbf{b}\,;Dv\rangle|^2 w^{-1}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_T v^2 w\,dx\Big)^{1/2} \le \text{(applichiamo (1.3))} \le$$

$$\leq c^{1/2}\Big(\int_T <ADv\,;Dv>dx\Big)^{1/2}\|v\|_2 \leq (cv)^{1/2}\|v\|_2\Big(\int_T |\nabla_\lambda v|^2 w(x)dx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq (cv)^{1/2}\Big[\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int_T |\nabla_\lambda v|^2 w(x)dx\Big], \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Scegliendo opportunamente ε otteniamo:

$$\int_T |\nabla_\lambda v|^2 w(x)dx \leq C_1\|v\|_2^2. \tag{2.5}$$

Sia ora $p>1$. Risulta evidentemente $\Big(\int_T v^{2p}w(x)dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{\Omega_0} \tilde{v}^{2p}w(x)dx\Big)^{1/p}$.

Tenendo presente che $\tilde{v} \in \overset{o}{H}_\lambda(\Omega_0)$, possiamo applicare, se p è scelto opportunamente, il teorema 4.6 di [FS], ottenendo:

$$\Big(\int_T v^{2p}w(x)dx\Big)^{1/p} \leq C_2\|\nabla_\lambda \tilde{v}\|_{L^2(\Omega_0,w)} \leq C_2\big(\|\nabla_\lambda \tilde{v}\|_{L^2(\Omega_0,w)} + \|\tilde{v}\|_{L^2(\Omega_0,w)}\big) \leq$$

$$\leq \text{(per la (2.1.b))} \leq C_3\big(\|\nabla_\lambda v\|_{L^2(\Omega,w)} + \|v\|_{L^2(\Omega,w)}\big) \leq \text{(per la (2.5))} \leq C_4\|v\|_2^2.$$

In definitiva, abbiamo ottenuto:

$$\Big(\int_T v^{2p}w(x)dx\Big)^{1/p} \leq C_4\|v\|_2^2. \tag{2.6}$$

D'altra parte, risulta anche:

$$\|v\|_2^2 = \int_T v^2 w\,dx = \int_T (v^2 w^{1/p})w^{1-1/p}\,dx \leq$$

$$\leq \Big(\int_T v^{2p}w\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_T w\,dx\Big)^{(p-1)/p} \leq \text{(per la (2.6))} \leq C_4\|v\|_2^2\Big(\int_T w\,dx\Big)^{(p-1)/p}.$$

Osserviamo che $\|v\|_2^2 > 0$ e $\int_T w\,dx$ è finito, perché w è un peso A_2. Allora:

(2.7) $$\int_T w\,dx \geq C_5 \qquad \text{(costante positiva).}$$

Osserviamo che C_5 *non dipende dalla scelta di* $k \in]k_o, M[$, nonostante T dipenda da k.

Chiamiamo λ la misura non negativa definita da: $d\lambda = wdx$; in questo modo, (2.7) diventa:

(2.8) $$\lambda(T) \geq C_5.$$

Poiché $\{x \in \Omega \mid u(x) < k\} \cap T = \varnothing$, avremo:

$$\lambda(\{x \in \Omega \mid u(x) < k\}) \leq \lambda(\Omega) - C_5.$$

Passando al limite per $k \to M^-$ otteniamo:

(2.9) $$\lambda(\{x \in \Omega \mid u(x) < M\}) \leq \lambda(\Omega) - C_5.$$

Da (2.9) segue, in particolare, che M è un *numero finito*, in quanto u è finita quasi ovunque; inoltre, ovviamente,

(2.9.a) $$\lambda(\{x \in \Omega \mid u(x) = M\}) \geq C_5$$

Sia $v_o = v_{k_o} = (u - k_o)^+$, sia $\varepsilon > 0$ e sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un funzione di classe C^1 con supporto compatto, tale che $G(t) = \dfrac{t}{M - k_o + \varepsilon - t}$ se $0 \leq t \leq M - k_o$.

Poniamo $v^{(\varepsilon)} = G \circ v_o = \dfrac{v_o}{M - k_o + \varepsilon - v_o}$. Allora $v^{(\varepsilon)} \in H$ (cfr. [Tr], lemma 1.57); inoltre $v^{(\varepsilon)} \geq 0$ e $v^{(\varepsilon)} = 0$ se $v_o(x) = 0$. Sostituiamo v con $v^{(\varepsilon)}$ in (2.2). Tenendo presente che $Du = Dv_o$ se $v_o(x) \neq 0$, concludiamo:

$$\int_\Omega \langle ADv_o\,;\,Dv^{(\varepsilon)}\rangle dx \leq -\int_\Omega \langle \mathbf{b}\,;\,Dv_o\rangle v^{(\varepsilon)} dx, \quad \text{ovvero:}$$

$$(2.10) \qquad (M - k_o + \varepsilon) \int_\Omega \frac{<ADv_o\,;Dv_o>}{(M - k_o + \varepsilon - v_o)^2}\,dx \leq - \int_\Omega <\mathbf{b}\,;Dv_o> v^{(\varepsilon)}dx.$$

Sia ora $\ell^{(\varepsilon)} = ln \dfrac{M - k_o + \varepsilon}{M - k_o + \varepsilon - v_o}$. Con facili passaggi si calcola:

$$(M - k_o + \varepsilon) \int_\Omega <AD\ell^{(\varepsilon)}; D\ell^{(\varepsilon)}>dx \leq \int_\Omega |<\mathbf{b}\,; D\ell^{(\varepsilon)}>| v_o dx \leq$$

$$\leq \text{(per (1.3))} \leq \; c \int_\Omega <AD\ell^{(\varepsilon)}\,; D\ell^{(\varepsilon)}>^{1/2} v_o\, w^{1/2}\, dx \leq$$

$$\leq c\, \Big(\int_\Omega <AD\ell^{(\varepsilon)}\,; D\ell^{(\varepsilon)}>dx\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega v_o^2 w\, dx\Big)^{1/2}$$

per la disuguaglianza di Hölder.

Ne consegue che *esiste una costante positiva* C_1, *indipendente da* ε, *tale che* $\int_\Omega <AD\ell^{(\varepsilon)}\,; D\ell^{(\varepsilon)}>dx \leq C_1$; allora, da (1.2) si trae:

$$(2.11) \qquad \int_\Omega |\nabla_\lambda \ell^{(\varepsilon)}|^2 w\, dx \leq C_2 \qquad \text{con } C_2 \text{ indipendente da } \varepsilon.$$

Dalla (2.11) desideriamo dedurre una maggiorazione per $\int |\ell^{(\varepsilon)}|^2 w\, dx$, calcolato su di una opportuna sfera della metrica *d* associata all'operatore L; i ragionamenti che seguono sono finalizzati a qesto risultato.

Siano $\mathcal{M} = \{x \in \Omega \mid v_o(x) = M{-}k_o\}$, $\mathcal{N} = \{x \in \Omega \mid v_o(x) = 0\}$. Quanto visto fino qui prova che $\lambda(\mathcal{M})>0$ e $\lambda(\mathcal{N})>0$. Indicata con S(x,r) la sfera di centro x e raggio r relativa alla metrica d associata all'operatore L, dimostriamo che

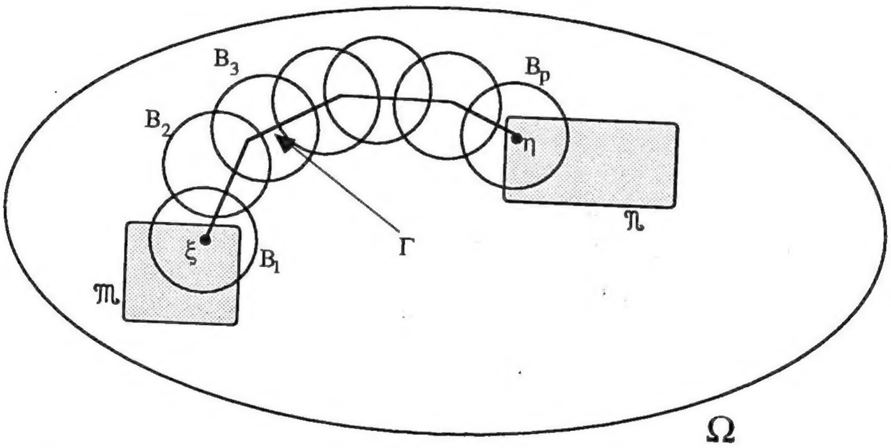
esiste $\xi \in \mathcal{M}$ *tale che : per ogni* $\varepsilon>0$, $\lambda(\mathcal{M} \cap S(\xi,\varepsilon)) > 0$

Risulta $\lambda(\mathcal{M}) = sup\ \{\lambda(K) \mid K$ compatto, $K \subseteq \mathcal{M}\}$; poiché $\lambda(\mathcal{M})>0$, esiste un compatto $K \subseteq \mathcal{M}$ tale che $\lambda(K)>0$. Proviamo che esiste $\xi \in K$ tale che: per ogni $\varepsilon>0$,

$\lambda(K\cap S(\xi,\varepsilon)) > 0$. Supponiamo per assurdo che non sia così. Tenendo presente la compattezza di K , si troveranno in tal caso $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m \in K$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m > 0$ tali che $\lambda(K\cap S(\xi_i,\varepsilon_i)) = 0$, e $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} S(\xi_i,\varepsilon_i)$; da ciò seguirebbe però $\lambda(K)=0$, che è falso. Nello stesso modo si dimostra che

$$\textit{esiste } \eta\in \mathcal{N} \textit{ tale che : per ogni } \varepsilon>0,\ \lambda(\mathcal{N}\cap S(\eta,\varepsilon)) > 0.$$

Poiché Ω è connesso, esiste un cammino continuo Γ contenuto in Ω che collega ξ ad η. Esistono allora $r>0$ e un numero finito di d-sfere di raggio r, $B_1, B_2, ..., B_p$ tali che: B_1 ha centro in ξ, B_p ha centro in η, e, per $1\le i\le p-1$, $B_i\cap B_{i+1}\neq\emptyset$ (si veda, per esempio, [M], lemma 4).



Indichiamo, per brevità, ℓ anziché $\ell^{(\varepsilon)}$; risulta:

$$\int_{B_1} |\ell(x)|^2 w(x)\,dx = \frac{1}{\lambda(B_1\cap B_2)} \int\int_{B_1\times(B_1\cap B_2)} |\ell(x)|^2 w(x)w(y)\,dx\,dy \le$$

$$\le \frac{2}{\lambda(B_1\cap B_2)} \int\int_{B_1\times(B_1\cap B_2)} (|\ell(y)|^2 + |\ell(x)-\ell(y)|^2) w(x)w(y)\,dx\,dy \le$$

$$\leq C_1 \Big(\int_{B_2} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy + \int\int_{B_1 \times B_1} |\ell(x)-\ell(y)|^2 w(x) w(y)\, dx\, dy \Big).$$

L'integrale doppio $\int\int_{B_1\times B_1} |\ell(x)-\ell(y)|^2 w(x)w(y)\, dx\, dy$ si può maggiorare nel modo seguente: sia $\ell_{B_1} = \frac{1}{\lambda(B_1)} \int_{B_1} |\ell(x)|^2 w(x)\, dx$; risulta evidentemente

$$\int\int_{B_1\times B_1} |\ell(x)-\ell(y)|^2 w(x)w(y)\, dx\, dy \leq$$

$$\leq 2 \int\int_{B_1\times B_1} |\ell(x)-\ell_{B_1}|^2 w(x)w(y)\, dx\, dy + 2 \int\int_{B_1\times B_1} |\ell(y)-\ell_{B_1}|^2 w(x)w(y)\, dx\, dy =$$

$= 4\,\lambda(B_1) \int_{B_1} |\ell(x)-\ell_{B_1}|^2 w(x)\, dx$ (*); applicando ora il teorema 4.5 di [FS] otteniamo, per una opportuna costante C_2, (*) $\leq C_2 \int_{B_1} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx$ e, a maggior ragione, $\leq \int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx$. In definitiva, abbiamo ottenuto:

$$\int_{B_1} |\ell(x)|^2 w(x)\, dx \leq C_3 \Big(\int_{B_2} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy + \int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx \Big) \tag{2.12}$$

Procedendo esattamente nello stesso modo troveremo una maggiorazione per $\int_{B_2} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy$ in termini di $\int_{B_3} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy$ e di $\int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx$;

dopo p–1 passaggi troveremo:

$$\int_{B_1} |\ell(x)|^2 w(x)\, dx \leq C \Big(\int_{B_p} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy + \int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx \Big) \tag{2.13}$$

La d–sfera B_p contiene un sottoinsieme di misura positiva, indipendente da ε, nel quale $\ell^{(\varepsilon)} = 0$; si può dunque applicare il teorema 4.1 di [FS], per maggiorare $\int_{B_p} |\ell(y)|^2 w(y)\, dy$ con una costante moltiplicata per $\int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx$. In definitiva, otteniamo:

(2.14)
$$\int_{B_1} |\ell^{(\varepsilon)}(x)|^2 w(x)\, dx \le C \int_{\Omega} |\nabla_\lambda \ell|^2 w\, dx$$

con C indipendente da ε; tenendo presente anche la (2.11) concludiamo che

(2.15)
$$\int_{B_1} |\ell^{(\varepsilon)}(x)|^2 w(x)\, dx \le C_3 \text{, con } C_3 \text{ indipendente da } \varepsilon.$$

D'altra parte abbiamo anche:

$$\int_{B_1} |\ell^{(\varepsilon)}(x)|^2 w(x)\, dx \ge \int_{B_1 \cap \mathfrak{M}} |\ell^{(\varepsilon)}(x)|^2 w(x)\, dx = \int_{B_1 \cap \mathfrak{M}} \left| ln\, \frac{M - k_o + \varepsilon}{\varepsilon} \right|^2 w(x)\, dx =$$

$= \lambda(B_1 \cap \mathfrak{M}) \left| ln\, \frac{M-k_o+\varepsilon}{\varepsilon} \right|^2$, poiché $v_o(x) = M - k_o$ quando $x \in B_1 \cap \mathfrak{M}$; ma ciò è in contraddizione con la (2.15), perché $\lambda(B_1 \cap \mathfrak{M}) > 0$ e $\left| ln\, \frac{M-k_o+\varepsilon}{\varepsilon} \right|^2 \to +\infty$ quando $\varepsilon \to 0$. Da ciò segue la tesi del teorema. □

3. Soluzioni deboli del problema di Neumann.

Sia f una funzione misurabile tale che $\frac{f}{w} \in L^2(\Omega_o, w)$. Supponiamo che $\partial\Omega$ (frontiera di Ω) sia regolare a tratti; per ogni $x \in \partial\Omega$ sia $\mathbf{n}(x)$ la normale esterna a Ω. Chiamiamo *soluzione debole* del problema di Neumann

(3.1)
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \langle ADu\, ;\, \mathbf{n} \rangle = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

ogni $u \in H$ tale che, per ogni $v \in H$, risulti:

$$(3.2) \qquad <L_\mu u\,;v> \;=\; \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,.$$

Osserviamo che, se u, v e i coefficienti di L sono funzioni C^1 allora (3.2) segue da (3.1) applicando il teorema della divergenza.

Teorema 2 (esistenza e unicità della soluzione debole di (3.1)) - *Supponiamo* $\mu(\Omega) > 0$; *supponiamo inoltre che esista un operatore di prolungamento* $\mathcal{E}: H_\lambda(\Omega) \to \mathring{H}_\lambda(\Omega_0)$ *ed una costante* C *tali che, per ogni* $u \in H_\lambda(\Omega)$, *si abbia:*

$$\|\mathcal{E}(u)\|_{H_\lambda(\Omega_0)} \le C\|u\|_{H_\lambda(\Omega)}\,.$$

Allora, per ogni f *tale che* $\frac{f}{w} \in L^2(\Omega_0,w)$ *il problema di Neumann* (3.1) *ha un'unica soluzione debole, cioè esiste un'unica* $u \in H$ *tale che* (3.2) *sia soddisfatta per ogni* $v \in H$.

dimostrazione. Sia k un numero positivo. Definiamo l'operatore $L_{\mu k}: H \to H'$ nel modo seguente: per ogni $u, v \in H$

$$(3.3) \qquad <L_{\mu k}u\,;v> = <L_\mu u\,;v> + k\int_\Omega uvw\,dx\,.$$

Mostreremo che, per un'opportuna scelta di k, la forma bilineare $H \times H \ni (u,v) \mapsto <L_{\mu k}u\,;v>$ è *coerciva*, cioè esiste $C > 0$ tale che, per ogni $u \in H$,

$$(3.4) \qquad <L_{\mu k}u\,;u> \ge C\|u\|_H^2$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e la (1.3) otteniamo:

$$\int_\Omega <\mathbf{b}\,;Du>u\,dx \;\le c\left(\int_\Omega |<\tfrac{1}{c}\mathbf{b}\,;Du>|^2 w^{-1}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq c\Big(\int_\Omega <ADu\,;Du>\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u^2w\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq \frac{c}{2\varepsilon}\int_\Omega <ADu\,;Du>\,dx+\frac{c\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2w\,dx,\ \text{per ogni}\ \varepsilon>0.$$

Allora:

$$(3.5)\qquad <L_{\mu k}u\,;u>\ \geq\Big(1-\frac{c}{2\varepsilon}\Big)\int_\Omega <ADu\,;Du>\,dx+\Big(k-\frac{c\varepsilon}{2}\Big)\int_\Omega u^2w\,dx.$$

Si possono scegliere ε e k in modo che $1-\frac{c}{2\varepsilon}>0$ e $k-\frac{c\varepsilon}{2}>0$; a questo punto applichiamo (1.2); ne consegue:

$$<L_{\mu k}u\,;u>\ \geq \nu^{-1}\Big(1-\frac{c}{2\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2w(x)\,dx+\Big(k-\frac{c\varepsilon}{2}\Big)\int_\Omega u^2(x)w(x)\,dx$$

dunque (3.4) è vera, per un opportuno $C>0$.
Per il teorema di Lax-Milgram (cfr. [GT] , teor. 5.8) esiste l'inversa di $L_{\mu k}$ cioè *per ogni* $g\in H'$ *esiste un'unica* $u\in H$ *tale che:*

$$(3.6)\qquad <L_{\mu k}u\,;v>\ =\ <g\,;v>\quad \text{per ogni}\ v\in H$$

Sia $\mathcal{I}:H\rightarrow H'$ l'operatore tale che, per ogni $u, v\in H$, si abbia:

$$(3.7)\qquad <\mathcal{I}(u)\,;v>\ =\int_\Omega uvw\,dx\ .$$

Fissiamo $\lambda_o>0$ in modo che $L_{\mu\lambda_o}$ sia invertibile; indichiamo per brevità $L_o=L_{\mu\lambda_o}$.
Possiamo riscrivere la (3.2) nel modo seguente:

$$(3.8)\qquad L_ou-\lambda_o\mathcal{I}(u)=\mathcal{I}\Big(\frac{f}{w}\Big)$$

oppure anche in quest'altro modo:

$$u - L_o^{-1}(\lambda_o \mathcal{I})(u) = L_o^{-1}(\mathcal{I}(\frac{f}{w})) \tag{3.9}$$

Per dimostrare esistenza e unicità della soluzione di (3.9) faremo vedere che, per ogni $g \in H$, esiste un'unica soluzione $u \in H$ dell'equazione:

$$u - \mathcal{K}(u) = g \tag{3.10}$$

in cui $\mathcal{K}$ indica l'operatore $L_o^{-1} \circ \lambda_o \mathcal{I}$.

Dimostriamo che $\mathcal{I}$ *è un operatore compatto* da H ad H'. Sia (u_n) una successione limitata in H; allora $(\mathcal{E}(u_n)) = (\tilde{u}_n)$ è una successione limitata in $\overset{o}{H}_\lambda(\Omega_o)$ Da ([FS], teor. 4.6) otteniamo che l'immersione $\overset{o}{H}_\lambda(\Omega_o) \to L^2(\Omega_o,w)$ è compatta; perciò esiste una sottosuccessione di $(\tilde{u}_n)$ che converge ad una $\tilde{u}_o \in L^2(\Omega_o,w)$ nella norma di $L^2(\Omega_o,w)$; possiamo supporre $\tilde{u}_n \xrightarrow[L^2(\Omega_o,w)]{} \tilde{u}_o$. Chiamiamo $u_o = \tilde{u}_o|_\Omega$; è chiaro che $u_n \xrightarrow[L^2(\Omega,w)]{} u_o$. Sia ora $v \in H$ tale che $\|v\|_H = 1$. Allora:

$$|\langle \mathcal{I}(u_n - u_o) ; v\rangle|^2 = \left| \int_\Omega (u_n - u_o) v w \, dx \right|^2 \le \int_\Omega (u_n - u_o)^2 w \, dx \int_\Omega v^2 w \, dx \le$$

$$\le \int_\Omega (u_n - u_o)^2 w \, dx \le \|u_n - u_o\|_{L^2(\Omega,w)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$ quindi $(\mathcal{I}(u_n))$ converge a $\mathcal{I}(u_o)$ nella norma di H', e di conseguenza $\mathcal{K}$ è un operatore compatto, perché $\mathcal{I}$ è compatto e L_o^{-1} è continuo.

Per il teorema dell'alternativa di Fredholm (cfr. [GT], teor. 5.3), per provare esistenza e unicità della soluzione di (3.10) è sufficiente far vedere che l'unica soluzione di

$$u - \mathcal{K}(u) = 0 \tag{3.11}$$

è $u = 0$.

Se u è soluzione di (3.11) , allora per ogni $v \in H$ risulta $\langle L_\mu u ; v\rangle = 0$. Per il principio di minimo (teorema 1) deve in tal caso essere $u = 0$; ciò conclude la dimostrazione. $\square$

4. Un esempio in cui esiste un operatore di prolungamento $\mathcal{E}: H_\lambda(\Omega) \to \overset{\circ}{H}_\lambda(\Omega_0)$

Sia $\lambda: \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ una funzione tale che i due campi $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \lambda(x)\frac{\partial}{\partial y}$ verifichino le ipotesi di [FL1]. Sia L l'operatore diferenziale

$$(4.1) \qquad L = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \mu$$

Sia Ω un aperto limitato e connesso di R^2; la norma $\|\cdot\|_H$ dello spazio definito come in precedenza è:

$$(4.2) \qquad \|u\|_H = \left(\int_\Omega (u^2(x,y) + (u_x'(x,y))^2 + \lambda^2(x)(u_y'(x,y))^2)\, dx\, dy \right)^{1/2}.$$

Teorema 3 - *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto, limitato e connesso, con* $\partial\Omega$ *regolare. Supponiamo che, per ogni* $P = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ *con* $x_0 = 0$ *esista una funzione di classe* C^1 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con derivata limitata, e un intorno* U *di* P *tale che* $\Omega \cap U$ *si possa descrivere come:* $\{(x,y) \in U \mid y < \varphi(x)\}$ *oppure* $\{(x,y) \in U \mid y > \varphi(x)\}$.
Inoltre, se $x_0 = 0$, *supponiamo che esista* $C > 0$ *tale che*

$$(4.2) \qquad |\varphi'(x)| \leq C\,\lambda(x) \quad \textit{per valori piccoli di } x.$$

Allora esiste un aperto limitato $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ *e un operatore continuo di prolungamento* $\mathcal{E}: H_\lambda(\Omega) \to \overset{\circ}{H}_\lambda(\Omega_0)$.

dimostrazione. La dimostrazione segue da vicino la tecnica usata da Stein in [S], Cap. 6 per definire un operatore di prolungamento per spazi di Sobolev definiti su aperti di $\mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana. Questa tecnica, dovuta a Calderon e Stein, consiste nel fare un prolungamento locale delle funzioni in un intorno dei punti di frontiera di Ω ; il prolungamento globale si ottiene facendo uso di una partizione dell'unità.

In un intorno di ciascun punto $(x_0,y_0) \in \partial\Omega$ con $x_0 \neq 0$, la norma (4.2) è equivalente alla norma del consueto spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$; in tal caso dunque non occorre qui dimostrare nulla, potendo fare diretto riferimento a quanto contenuto in [S] .

Consideriamo perciò un punto $(0,y_o) \in \partial\Omega$; sia $u \in H$, sia B un intorno limitato di $(0,y_o)$ e sia $h \in C_0^\infty(B)$ una funzione tale che $h(x,y) = 1$ vicino a $(0,y_o)$. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, con φ' limitata, tale che:

$$\Omega \cap B = \{(x,y) \in \Omega \mid y > \varphi(x)\}.$$

Poniamo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$ e, per ogni $(x,y) \in D$, $f(x,y) = u(x,y) \cdot h(x,y)$.
Poiché $C^1(\Omega)$ è denso in $H_\lambda(\Omega)$, non è restrittivo supporre u di classe C^1.
Per ogni $(x,y) \in D' = \mathbb{R}^2 - D$ poniamo:

$$g(x,y) = \mathcal{E}(f)(x,y) = \int_1^{+\infty} f(x, y - 2t\,(y - \varphi(x)))\psi(t)dt. \tag{4.3}$$

In (4.3) ψ indica una funzione continua definita in $[1,+\infty[$ a decrescenza rapida all'infinito e tale che:

$$\int_1^{+\infty} \psi(t)dt = 1; \qquad \int_1^{+\infty} t^k\psi(t)dt = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

(cfr ([S], cap. VI, lemma 1).
Come in [S] si può dimostrare che g è C^∞ nei punti interni di D', e che g prolunga f in una funzione di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}^2$.
Desideriamo ora ottenere una stima di

$$\int_{D'} (g^2(x,y) + (g_x')^2(x,y) + \lambda^2(x)(g_y')^2(x,y))\, dx\, dy \tag{4.5}$$

con

$$\int_{D} (f^2(x,y) + (f_x')^2(x,y) + \lambda^2(x)(f_y')^2(x,y))\, dx\, dy. \tag{4.6}$$

La stessa tecnica usata in [S] fornisce una stima di $\int_{D'} g^2(x,y)dxdy$ con $\int_D f^2(x,y)\,dx\,dy$; per quanto concerne le derivate, vi sono alcune differenze. Da (4.3) segue:

$$(4.7)\quad \frac{\partial g}{\partial x} = \int_1^{+\infty} f'_x(x,y-2t\,(y-\varphi(x))\psi(t)dt + \int_1^{+\infty} f'_y(x,y-2t\,(y-\varphi(x))\cdot 2t\varphi'(x)\psi(t)dt.$$

Consideriamo anzitutto il secondo integrale di (4.7). Poniamo:

$$(4.8)\qquad p(x,y) = \int_1^{+\infty} f'_y(x,y-2t\,(y-\varphi(x))\cdot 2t\varphi'(x)\psi(t)dt.$$

Operiamo la sostituzione: $s = y - 2t\,(y - \varphi(x)) - \varphi(x)$; otterremo:

$$(4.9)\quad p(x,y) = \int_{\varphi(x)-y}^{+\infty} f'_y(x,s+\varphi(x))\Big(1+\frac{s}{\varphi(x)-y}\Big)\varphi'(x)\psi\Big(\frac{1}{2}\Big(1+\frac{s}{\varphi(x)-y}\Big)\Big)\frac{ds}{2(\varphi(x)-y)}$$

Poiché ψ è a decrescenza rapida all'infinito, per ogni $\alpha > 0$ esiste $A > 0$ tale che $\psi(t) \le \frac{A}{t^\alpha}$ $\forall\, t \in [1,+\infty[$; dunque sarà:

$$|p(x,y)| \le A\frac{|\varphi'(x)|}{|\varphi(x)-y|^{2-\alpha}} \int_{\varphi(x)-y}^{+\infty} |f'_y(x,s+\varphi(x))|\frac{ds}{|\varphi(x)-y+s|^{\alpha-1}}$$

e ricordando che $\varphi(x) - y + s > s > 0$,

$$|p(x,y)| \le A\frac{|\varphi'(x)|}{|\varphi(x)-y|^{2-\alpha}} \int_{\varphi(x)-y}^{+\infty} |f'_y(x,s+\varphi(x))|\frac{ds}{s^{\alpha-1}}.$$ Perciò

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} |p(x,y)|^2\,dy \le A^2 \int_{-\infty}^{\varphi(x)} \frac{|\varphi'(x)|^2}{|\varphi(x)-y|^{4-2\alpha}} \Big(\int_{\varphi(x)-y}^{+\infty} |f'_y(x,s+\varphi(x))| \frac{ds}{s^{\alpha-1}} \Big)^2 dy\ .$$

Nell'integrale esterno del secondo membro poniamo: $v = \varphi(x) - y$; allora:

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} |p(x,y)|^2\,dy \le A^2 \int_0^{+\infty} \frac{|\varphi'(x)|^2}{v^{4-2\alpha}} \Big(\int_v^{+\infty} |f'_y(x,s+\varphi(x))|\, s^{1-\alpha}\,ds \Big)^2 dv\ .$$

Applicando ora la disuguaglianza di Hardy ([S], Appendice A) otteniamo:

$$\text{(4.10)} \qquad \int_{-\infty}^{\varphi(x)} |p(x,y)|^2\,dy \le C\,|\varphi'(x)|^2 \int_0^{+\infty} |f'_y(x,s+\varphi(x))|^2\,ds =$$

$$= C\,|\varphi'(x)|^2 \int_{\varphi(x)}^{+\infty} |f'_y(x,y)|^2\,dy\ .$$

Da (4.10) e (4.2) segue allora

$$\text{(4.11)} \qquad \int_{-\infty}^{\varphi(x)} |p(x,y)|^2\,dy \le C\,\lambda^2(x) \int_{\varphi(x)}^{+\infty} |f'_y(x,y)|^2\,dy$$

e quindi, integrando su $\mathbb{R}$ entrambi i membri di (4.11), troviamo

$$\text{(4.12)} \qquad \int_{D'} |p(x,y)|^2\,dx\,dy \ \le\ C \int_D \lambda^2(x)\,|p(x,y)|^2\,dx\,dy \ \le\ C\ \|u\|^2_{H(D)}\ .$$

Il primo integrale del secondo membro di (4.7) può essere valutato nello stesso modo, al pari dell'integrale che esprime $\frac{\partial g}{\partial y}$.

E' immediato osservare che g ha supporto compatto. A questo punto, con la stessa tecnica usata in [S], § 3.3 possiamo ottenere, usando una partizione dell'unità, l'operatore di estensione che desideravamo. □

Bibliografia

[C] P. CALDERON, *"Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions".* Proc. Symp. in Pure Math **5** (1961) 33-49.

[FKS] E. FABES - C. KENIG - R. SERAPIONI, *"The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations".* Comm. in Partial Diff. Equations **7** (1982) 77-116.

[FL1] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *"Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres".* Proceedings of the meeting Linear Partial and Pseudo Differential Operators. Rend. Sem. Mat Univ. e Politec. Torino (1982) 105-114.

[FL2] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *"An embedding theorem for Sobolev spaces related to non smooth vector fields and Harnack inequality".* Comm. in Partial Diff. Equations **9** (1984) 1237-1264.

[FL3] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *"Hölder regularity theorem for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients".* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4**, vol. X (1983), 523-541.

[FL4] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *"Une conditione géométrique pour l'inégalité de Harnack".* J. Math. Pures et Appl. 64 (1985), 237-256.

[FS] B. FRANCHI - R. SERAPIONI, *"Pointwise Estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach".* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4**, Vol. XIV (1987) 527-568.

[GT] D. GILBARG - N. S. TRUDINGER, *"Elliptic partial differential equations of second order".* Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1977.

[M] J. MOSER, *"On a Pointwise Estimate for Parabolic Diferential Equations".* Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. XXIV (1971) 72-740.

[NS] P. NEGRINI - V. SCORNAZZANI, *"Minimum principle for a class of degenerate elliptic operators and application to the Neumann problem".* In preparazione.

[S] E. M. STEIN, *"Singular Integrals and differentiability properties of functions".* Princeton University Press, Princeton 1970.

[Tch] N. A. TCHOU, *"A Neumann problem".* Boll. Un. Mat. Ital. **7**, 4-B (1990) 127-141.

[Tr] G. M. TROIANIELLO, *"Elliptic differential equations and obstacle problems".* Plenum Press, New York - London 1987.